

DOI:10.16031/j.cnki.issn.1003-8035.2018.02.15

基于灰色 Verhulst 模型的山西太原地面沉降趋势分析

周艳萍

(榆林学院, 陕西 榆林 719000)

摘要: 本文首先通过分析地面沉降的诱发因素和研究对象, 发现具有灰色特性, 并且地面沉降随时间的变化曲线与 Verhulst 模型曲线相似, 因而可以应用该模型预测太原市地面沉降。其次根据五个沉降中心中 30 个典型的水准观测点的累积沉降量建立了灰色 Verhulst 预测模型。最后预测了 2010 年与 2015 年的地面沉降发展趋势, 得出 2010 年总体沉降范围向外扩展, 小店中心扩大幅度较大, 吴家堡年均沉降速率持续减缓; 到 2015 年西张沉降趋势基本趋于稳定状态, 万柏林和下元沉降速率减缓, 吴家堡沉降幅度变化不大, 万柏林、下元和吴家堡的沉降范围已连成一片, 小店中心最大沉降量达 1 508 mm, 年均沉降速率为 45 mm/a。

关键词: 地面沉降; 灰色 Verhulst 模型; 累积沉降; 预测

中图分类号: P642.26

文献标识码: A

文章编号: 1003-8035(2018)02-0094-06

Land subsidence trend of Taiyuan City, Shanxi based on Grey Verhust Model

ZHOU Yanping

(Yulin University, Yulin, Shaanxi 719000, China)

Abstract: Land subsidence represents a common hazard impacting extensive areas worldwide. Land subsidence has grey characteristics by analysing its inducing factors. The paper applies the Verhulst Model to predict the land subsidence of Taiyuan City, Shanxi Province because the curve of land subsidence-time is similar to the Verhulst Model. The Grey Verhulst Model is proposed based on the accumulated settlement data of 30 observation points from five subsidence centers of Taiyuan City. The Grey Verhulst Model is used to predict the land subsidence of Taiyuan City in 2010 and 2015. The results reveal the range of land subsidence extends in 2010, especially in Xiaodian. The annual average rate of land subsidence continued to be slow in Wujiabao. In 2015, the rate of land subsidence was stable in Xizhang and slow in Wanbolin and Xiayuan. The land subsidence had little change in Wujiabao. The subsiding area of Wanbolin, Xiayuan and Wujiabao had linked together. The maximum settlement value was 1 508 mm in Xiaodian center, and the annual average rate of land subsidence was 45 mm/a.

Keywords: land subsidence; Grey Verhulst Model; cumulative subsidence amount; prediction

0 引言

地面沉降是目前地质灾害中的一个主要灾种, 它是在自然和人为因素作用下, 由于地壳表层土体压缩

而导致区域性地面标高降低的一种缓变性地质现象, 是一种不可补偿的永久性环境和资源损失, 严重时可导致灾害^[1-2], 地面沉降预测研究是地质灾害学和工程地质学等领域的重要课题之一。目前国内外对地下

收稿日期: 2017-03-07; 修订日期: 2017-12-27

基金项目: 教育部科学技术研究重点项目(104038); 榆林学院高层次人才项目: 地质建模的研究(12GK45)

作者简介: 周艳萍(1981-), 女, 地球探测与信息技术专业, 研究生, 讲师, 主要从事地质工程方面的研究。E-mail: zyp - min@163.com

水超采引发的地面沉降预测模型广泛采用三维运动和固结耦合模型(MODFLID),该模型主要适用于土层厚度变化较小的局部区域范围内的地面沉降研究,而对于土层厚度变化较大、土体空间异质性不可忽略的区域范围内的地面沉降应用研究则受到限制^[3-5]。

本文以太原市地面沉降作为研究对象,自20世纪50年代太原市就已出现地面沉降现象,近年来随着人口的增加和城市建设的飞速发展,地下水超采现象持续严重,沉降范围和幅度逐年扩大。目前,太原市已形成了五个沉降漏斗区,最大累计沉降量达3 122 mm,成为我国地面沉降较严重的城市之一^[6]。太原市地面沉降发生在典型的内陆断陷盆地内,盆地内基底构造复杂,断裂活动仍在继续,且地下水超采十分严重。因此,其沉降原因、机理及治理思路均有别于沿海地区。对此,不少学者曾做过有益的探讨和研究,方鹏飞等(2002年)^[7]认为太原市的地面沉降主要是由于集中开采深层承压含水层引起的;周艳萍(2011年)^[8]建立了太原市地面沉降的BP神经网络,并预测了2009~2015年地面沉降的趋势;刘媛媛等(2014)^[9]采用PS-InSAR技术对太原市的20景ENVISATASAR影像进行数据处理,得到了该研究区的形变速率图和形变时间序列图。太原市地面沉降目前仍处于继续发展状态,未来地面沉降的发展情况受多种因素影响呈动态变化,并且是不确知的,它属于灰色系统的范畴,因此本文首次应用灰色Verhulst模型对太原市地面沉降量进行了预测。

1 灰色 Verhulst 预测模型

Verhulst模型起源于马尔萨斯(Malthasia)模型,该模型适用于生物繁殖初期阶段的预测,但是当生物繁殖发展到一定程度后,繁殖量的增长受各种因素影响,增长速率逐渐减缓,该模型就不再适用了。1837年德国生物学家Verhulst对马尔萨斯模型进行了修正,提出了一个新的非线性微分方程模型:

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t) - bp^2(t) \quad (1)$$

式中: a 、 b ——常数;

$p(t)$ ——阻尼项,代表对生物繁殖不利的各种

$$B = \begin{bmatrix} -Z^{(1)}(1) & Y^{(1)}(1) \\ -Z^{(1)}(2) & Y^{(1)}(2) \\ \vdots & \vdots \\ -Z^{(1)}(n-1) & Y^{(1)}(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(S^{(1)}(1) + S^{(1)}(2))/2 & (S^{(1)}(1) + S^{(1)}(2))^2/4 \\ -(S^{(1)}(2) + S^{(1)}(3))/2 & (S^{(1)}(2) + S^{(1)}(3))^2/4 \\ \vdots & \vdots \\ -(S^{(1)}(n-1) + S^{(1)}(n))/2 & (S^{(1)}(n-1) + S^{(1)}(n))^2/4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

影响。

该模型的解为:

$$p(t) = \frac{a/b}{1 + \left(\frac{a}{bp_0} - 1\right)e^{a(t-t_0)}} \quad (2)$$

式中: t_0 ——为初始时刻;

p_0 —— $p(t)$ 的初始值。

灰色Verhulst模型是在Verhulst理论的基础上,利用灰色系统建模只需要贫信息、小样本的优势及其特定的建模方法而形成的。建立Verhulst模型时要求原始数据是S型的,否则效果不佳(图1);而灰色Verhulst模型则是对近似的单峰型数据作一次累加,得到较好的S型后,再建立模型,这正是灰色Verhulst模型优于一般Verhulst模型之处^[10]。

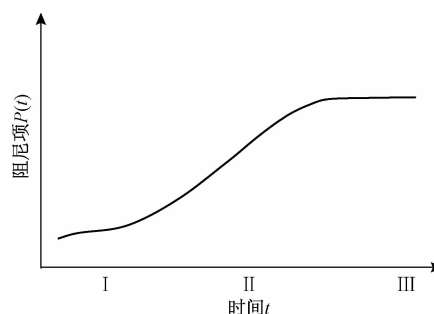


图1 灰色 Verhulst 模型曲线

Fig. 1 The curve of Grey Verhulst Model

1.1 常规灰色 Verhulst 模型

定义1:设有非负原始数据序列: $S^{(0)} = \{s^{(0)}(1), s^{(0)}(2), \dots, s^{(0)}(n)\}$,对 $S^{(0)}$ 作一次累加为 $S^{(1)}$ (即1-AGO),得到: $S^{(1)} = \{s^{(1)}(1), s^{(1)}(2), \dots, s^{(1)}(n)\}$, $Z^{(1)}$ 为 $S^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列,则称 $S^{(0)} + aZ^{(1)} = b(Z^{(1)})^a$ 为GM(1,1)模型的幂模型。式中, a 为发展系数, b 为灰作用量。

定义2:当 $\alpha = 2$ 时,称 $S^{(0)} + aZ^{(1)} = b(Z^{(1)})^2$ 为灰色Verhulst模型。

定义3:称 $\frac{dS^{(1)}}{dt} + aS^{(1)} = b(S^{(1)})^2$ 为灰色Verhulst模型的白化方程。

用最小二乘法及极值原理进行求解,模型参数 a 、 b 满足 $[a, b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$,组合矩阵 B 和 Y 分别为:

$$Y = [S^{(0)}(2), S^{(0)}(3), \dots, S^{(0)}(n)]^T \quad (4)$$

灰色 Verhulst 模型白化方程的解为:

$$S^{(1)}(t) = \frac{aS^{(1)}(1)}{bS^{(1)}(1) + (a - bS^{(1)}(1))e^{at}} \quad (5)$$

时间响应式为:

$$S^{(1)}(t_{k+1}) = \frac{aS^{(1)}(1)}{bS^{(1)}(1) + (a - bS^{(1)}(1))e^{a(t_{k+1}-t_1)}} \quad (6)$$

任意给定时间 t , 即可由上式求出相应的沉降量。

1.2 不等时距灰色 Verhulst 模型

灰色 Verhulst 模型背景值的常规取法为:

$$Z^{(1)}(t_{k+1}) = 0.5(S^{(1)}(t_{k+1}) + S^{(1)}(t_k)) \quad (7)$$

$$Y^{(1)}(t_{k+1}) = 0.25(S^{(1)}(t_{k+1}) + S^{(1)}(t_k))^2 \quad (8)$$

其中, $Z^{(1)}(t_{k+1})$ 是 $\frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} S^{(1)} dt}{t_{k+1} - t_k}$ 的近似值,

$Y^{(1)}(t_{k+1})$ 是 $\frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} (S^{(1)})^2 dt}{t_{k+1} - t_k}$ 的近似值。

一般在等时距或者时间间隔不是很大时,原始数据序列变化平缓,(7)与(8)的精度可以保证。但在不等时距或时间间隔较大的情况下,这两式将会产生较大的滞后或者超前误差,从而导致模型偏差较大,在一定程度上影响了灰色 Verhulst 模型的应用。因此,为了克服这个缺

点,希望能够对 $\frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} S^{(1)}(t) dt}{t_{k+1} - t_k}$ 和 $\frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} (S^{(1)}(t))^2 dt}{t_{k+1} - t_k}$ 直接积分求解,求出比较确切的背景值的计算公式,从而有效地提高模型的精度。

设在区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 上,有:

$$S^{(1)}(t) = \frac{m}{1 + \left(\frac{m}{S^{(1)}(t_k)} - 1\right)e^{-c(t-t_k)}} \quad (9)$$

通过公式 $[a', b']^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$ 以及式(3)、式(4),求出 a' 和 b' , 令 $m = \frac{a'}{b'}$, 并且认为其在各个区间上保持定值,这样就可以使(9)表示的曲线与原数据曲线的凹凸性保持一致。则

$$S^{(1)}(t_{k+1}) = \frac{m}{1 + \left(\frac{m}{S^{(1)}(t_k)} - 1\right)e^{-c(t_{k+1}-t_k)}} \quad (10)$$

可以求出:

$$c = \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \ln \left(\frac{\frac{m}{S^{(1)}(t_k)} - 1}{\frac{m}{S^{(1)}(t_{k+1})} - 1} \right) \quad (11)$$

至此,可以获得改进后的背景值为:

$$Z^{(1)}(t_{k+1}) = \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{m}{1 + \left(\frac{m}{S^{(1)}(t_k)} - 1\right)e^{-c(t-t_k)}} dt \quad (12)$$

$$Y^{(1)}(t_{k+1}) = \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{m}{1 + \left(\frac{m}{S^{(1)}(t_k)} - 1\right)e^{-c(t-t_k)}} \right)^2 dt \quad (13)$$

利用(12)和(13)求出矩阵 B , 进而求出模型参数 a 和 b , 将其带入(6)即可求出对应的沉降量。

2 地面沉降系统的灰色特性

地面沉降的诱发因素包括自然因素和人为因素,其形式及性质是多种多样的,不同因素所诱发的地面沉降的范围、速度、持续时间也不相同。这些因素综合作用,共同决定了区域性地面沉降条件。同时,由于地质条件的隐藏性和目前勘察技术的局限性,使得许多因素不可知或知之甚少,并且很难确定各因素与地面沉降之间的定量关系。因此,区域性的地面沉降符合灰色系统的特征。

地面沉降研究的对象是土层—地质作用—人类活动这个复杂的系统,仔细考察这个系统可以发现^[11]: (1)表征系统的参数是灰数。由于监测技术不完善、仪器误差、外界干扰以及其它各种原因,使得大量的实测数据在形式上是白数,实质上均可看作是在真实值的某个邻域内变化的灰数;(2)影响地面沉降的因素是灰元。在地面沉降中,有许多影响因素不完全明确,即使已经明确的又难以量化,而已经量化的却又随机变化;(3)构成系统的各种关系是灰关系,各种因素和地面沉降主行为之间的关系是灰关系。因此,土层—地质作用—人类活动这个系统是一个部分信息已知、部分信息未知的不具有物理原型的灰色系统,将灰色系统理论应用于地面沉降研究是有科学依据的。

梅国雄等^[12]从土体本构关系出发,证明了沉降量—时间曲线也呈 S 形(图 2),图中的各个阶段可以这样描述:发生阶段 ab 段:即沉降量近乎线性增加阶段, s 较小,曲线斜率逐渐增大;发展阶段 bc 段:即沉降速率不断增大阶段, s 突增, $\frac{ds}{dt}$ 值达到最大;成熟阶段 cd 段:即沉降速率递减阶段, s 继续增大,但速率减小;到达极限 de 段:即沉降趋于稳定阶段, s 增加值趋于 0, $\frac{ds}{dt}$ 趋于 0。对比图 1 和图 2,可以看出:地面沉降量

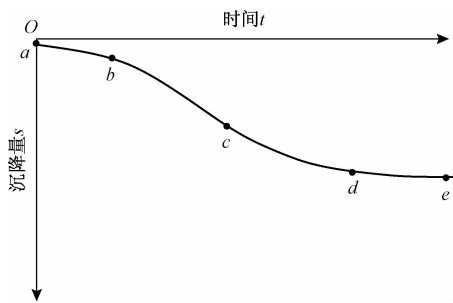


图 2 地面沉降—时间关系曲线
Fig. 2 The relationship curve between
land subsidence and time

与时间 $s \sim t$ 曲线符合灰色 Verhulst 模型所反映的规律。因此,用灰色 Verhulst 模型来预测地面沉降随时间的变化规律是可行的。

3 地面沉降预测

3.1 建模数据序列的选取

根据近年来太原市地面沉降的发展情况及各沉降中心的特征,本文选取了五个沉降中心中的 30 个典型的水准观测点自 1981—1989—1994—2000—2004—2006 年的累积沉降量作为原始建模数据序列。

3.2 模型的建立及精度检验

由于所收集到的水准点累积沉降量的实测序列是不等时间间隔的,故本文利用 MATLAB 软件编写不等时距灰色 Verhulst 模型程序,分别对 30 个水准观测点进行建模模拟计算,限于篇幅,此处仅列出 9 个水准观测点的模拟值和精度检验的结果(表 1)。(建模时,以前 5 个实测值作为建模数据序列,第 6 个实测值用作拟合检验。)

从表 1 中各项数据来看,对这些水准点的累积沉降量所建立的灰色模型中,从均方差比值 C 和小误差

表 1 部分水准点累积沉降量的模拟结果对比表(单位:mm)
Table 1 The contrast table of the simulated
cumulate subsidence of part leveling
marks in two methods (unit:mm)

点号		1981	1989	1994	2000	2004	2006	$C、P$
西村 5	实测值	7	49	85	97	101	95	$C=0.062\ 9$
	预测值	7	51	85	99	101	101	$P=1$
赵庄 21	实测值	62	214	343	443	505	516	$C=0.125\ 4$
	预测值	62	193	316	445	499	553	$P=1$
圪潦沟 27	实测值	11	30	36	56	65	72	$C=0.140\ 2$
	预测值	11	23	33	49	59	63	$P=1$
博物馆 47	实测值	178	476	667	845	921	929	$C=0.041$
	预测值	178	450	654	840	915	939	$P=1$
新华社 52	实测值	163	490	752	1 009	1 135	1 165	$C=0.035\ 8$
	预测值	163	459	723	1 002	1 125	1 167	$P=1$
沙沟 55	实测值	99	214	331	508	652	710	$C=0.025\ 7$
	预测值	99	210	322	504	646	719	$P=1$
义井 57	实测值	246	824	1 132	1 472	1 622	1 676	$C=0.087\ 6$
	预测值	246	681	1 052	1 424	1 581	1 634	$P=1$
大马 63	实测值	590	1 309	2 434	2 815	2 908	2 983	$C=0.217\ 0$
	预测值	590	1 880	2 554	2 896	2 973	2 992	$P=1$
吴家堡 65	实测值	827	1 730	2 282	2 797	3 022	3 122	$C=0.014\ 8$
	预测值	827	1 699	2 272	2 793	3 014	3 093	$P=1$

概率 P 可以得出所有等级均为一级(好),精度很高。因此,本文用它来预测太原市未来的地面沉降发展趋势和程度是可行的,并且具有较高的精度。

3.3 模型的应用及预测结果分析

本文采用灰色 Verhulst 预测模型对上述 30 个水准观测点在 2010 年与 2015 年的累积沉降量进行建模预测(表 2)。

根据上述预测结果,对数据采用克里金插值方法,利用 MAPGIS 软件绘制了太原市 2010 年与 2015 年的地面沉降等值线图,详见图 3 和图 4。

表 2 2010 年与 2015 年水准观测点的累积沉降量预测结果(单位:m)
Table 2 The cumulate subsidence forecast results of leveling marks above in 2010 and 2015 (unit: m)

点号	5	8	13	16	21	27	29	31	32	38
2010 年	-0.101	-0.591	-0.726	-0.406	-0.532	-0.094	-0.086	-1.168	-0.722	-0.113
2015 年	-0.102	-0.594	-0.739	-0.411	-0.543	-0.127	-0.123	-1.209	-0.731	-0.171
点号	42	47	52	54	55	57	60	63	65	67
2010 年	-1.752	-0.950	-1.208	-0.158	-0.831	-1.719	-0.166	-3.049	-3.205	-0.370
2015 年	-1.826	-0.965	-1.239	-0.182	-0.934	-1.770	-0.245	-3.060	-3.283	-0.531
点号	68	69	71	76	78	80	81	84	85	91
2010 年	-1.285	-0.528	-1.209	-0.944	-1.190	-1.366	-0.511	-1.058	-0.781	-0.962
2015 年	-1.332	-0.552	-1.349	-1.253	-1.417	-1.508	-0.612	-1.326	-0.885	-1.320

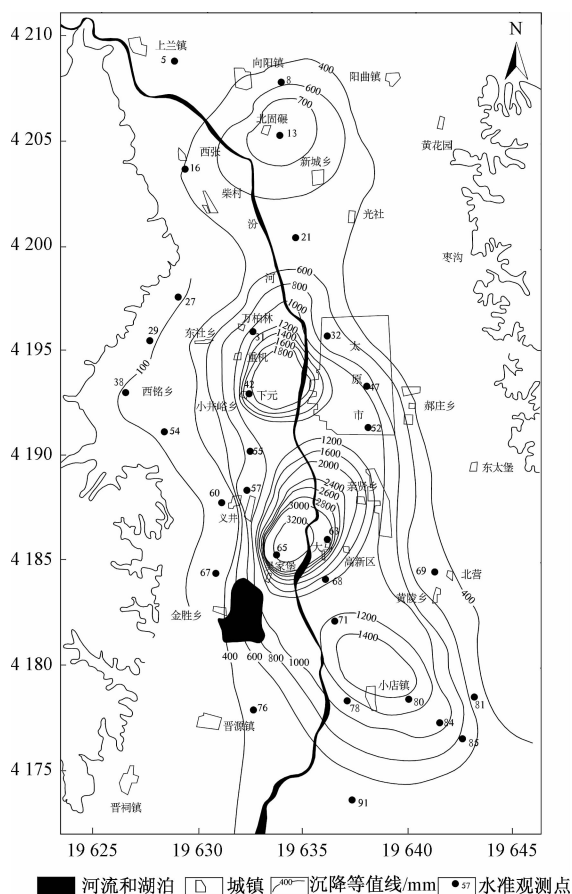


图3 太原市2010年地面沉降等值线图

Fig. 3 The land subsidence isogram of Taiyuan City in 2010

到2010年,地面沉降的发展概况和趋势如下:西张沉降中心外围400 mm等值线范围稍有扩大,内闭合线为700 mm;万柏林和下元沉降范围向外扩展;吴家堡虽然水位有所回升,但沉降中心继续发展,沉降速率持续减缓,外围闭合线发展为1 200 mm,内闭合线为3 200 mm;小店沉降中心的沉降范围大幅度扩大,外围闭合线为1 200 mm,最大沉降量为1 366 mm。

到2015年,地面沉降的发展情况为:与2010年相比,西张沉降中心的变化不大,基本趋于稳定状态;万柏林和下元沉降中心的地面沉降量持续增大,但年均沉降速率减缓;吴家堡的沉降幅度变化不是很大;万柏林、下元和吴家堡的沉降范围已连成一片;小店沉降中心的外围1 200 mm闭合线范围扩大,最大沉降量为1 508 mm,年均沉降速率为45 mm/a。

4 结论

本文在分析地面沉降系统的灰色特性的基础上,依据不等时距灰色 Verhulst 模型对太原市地面沉降水

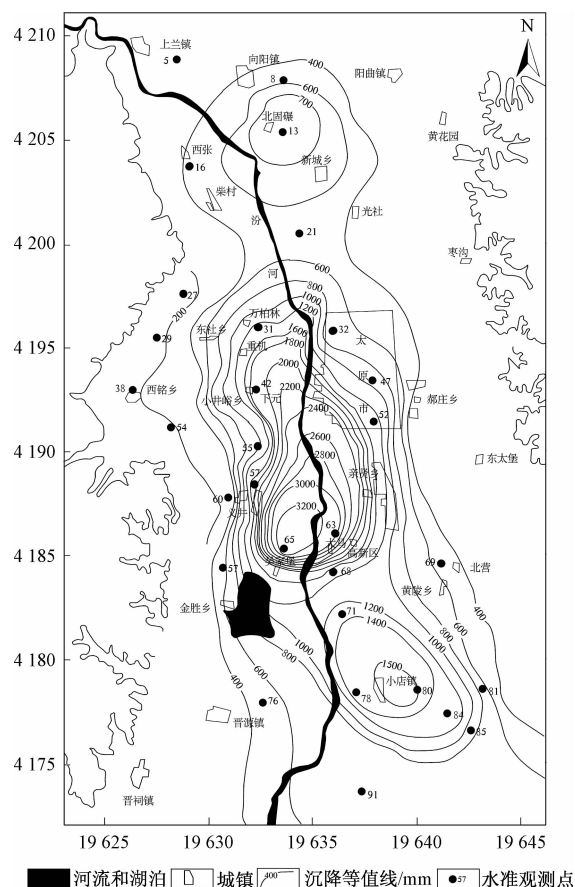


图4 太原市2015年地面沉降等值线图

Fig. 4 The land subsidence isogram of Taiyuan City in 2015

准观测点的累积沉降量建立了模型,利用 MATLAB 软件编程计算,求出拟合结果,进行精度检验,最后预测其在2010年与2015年的发展趋势,得出以下结论:

(1)地面沉降量随时间的变化曲线与 Verhulst 模型曲线相似,因而灰色 Verhulst 模型在地面沉降预测中是可行的。

(2)到2010年总体地面沉降范围向外扩展,吴家堡沉降中心虽继续发展,但沉降速率持续减缓,小店沉降范围扩大幅度较大。

(3)到2015年西张沉降中心基本趋于稳定状态,万柏林和下元年均沉降速率减缓,吴家堡沉降幅度变化不大,万柏林、下元和吴家堡的沉降范围已连成一片,小店中心最大沉降量发展为1 508 mm,年均沉降速率为45 mm/a。

(4)灰色 Verhulst 预测模型虽然有其独特的优点,但也存在着不少病态性问题,再加上实际系统的复杂多样性,如何更好地对模型进行改进,以便提高其预测精度和适用性,仍将是一个课题。

参考文献:

- [1] 郑铎鑫,武强,侯艳声,等.关于城市地面沉降研究的几个前沿问题[J].地球学报,2002,23(3):279-282.
ZHENG Xixin, WU Qiang, HOU Yansheng, et al. Some frontier problems on land subsidence[J]. Acta Geoscientica Sinica, 2002, 23(3): 279-282.
- [2] 段晓峰,许学工,王若柏.天津沿海地区地面沉降及其影响因素[J].北京大学学报(自然科学版),2014,50(6):1071-1076.
DUAN Xiaofeng, XU Xuegong, WANG Ruobai. Land subsidence and its influencing factors in Tianjin coastal area [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, 2014, 50(6): 1071-1076.
- [3] P Teatini, M Ferronato, G Gambolati, etc. A century of land subsidence in Ravenna, Italy [J]. Environ. Geol, 2005(47): 831-846.
- [4] Thanh Hong Phi. Ludmila Aleksandrovna Strokova. Prediction of land subsidence caused by groundwater exploitation in Hanoi, Vietnam, using multi factorial correlation analysis [J]. Sciences in Cold and Arid Regions, 2013, 5(5): 644-653.
- [5] 孙自永,马腾,马军,等.太原市地层空间异质性对地面沉降分布的影响[J].岩土力学,2007,28(2):399-403.
SUN Ziyong, MA Teng, MA Jun, et al. Effect of strata heterogeneity on spatial pattern of land subsidence in Taiyuan City [J]. Chinese Journal of Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(2): 399-403.
- [6] 闫世龙,王焰新,马腾,等.内陆新生代断陷盆地区地面沉降机理及模拟[M].武汉:中国地质大学出版社,2006.
YAN Shilong, WANG Yanxin, MA Teng, et al. The land subsidence mechanism and simulation of inland genozoic downfaulted [M]. Wuhan: China University of Geosciences Press, 2006.
- [7] 方鹏飞,朱向荣,武胜忠.太原市地面沉降的计算与预测[J].煤田地质与勘探,2002,30(4):44-46.
FANG Pengfei, ZHU Xiangrong, WU Shengzhong. The calculation and forecast of land subsidence in Taiyuan City [J]. Coal Geology and Exploration, 2002, 30(4): 44-46.
- [8] 周艳萍.基于BP神经网络的太原市地面沉降预测及分析[J].地质科技情报,2011,30(5):115-118.
ZHOU Yanping. Land subsidence forecast and analysis of Taiyuan City based on BP neural network [J]. Chinese Journal of Geological Science and Technology Information, 2011, 30(5): 115-118.
- [9] 刘媛媛,张勤,赵超英,等.PS-InSAR技术用于太原市地面沉降形变分析,大地测量与地球动力学,2014,34(2):6-13.
LIU Yuanyuan, ZHANG Qin, ZHAO Chaoying, et al. Analysis of ground subsidence deformation in Taiyuan City with PS-InSAR technology [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2014, 34(2): 6-13.
- [10] 袁嘉祖.灰色系统理论及其应用[M].北京:科学出版社,1991.
YUAN Jiazu. Grey system theory and its application [M]. Beijing: Science Press, 1991.
- [11] 宫相霖,董荣鑫.灰色系统在地面沉降分析中的应用[J].上海地质,2003(3):16-21.
GONG Xianglin, DONG Rongxin. Application of grey system in land subsidence analysis [J]. Shanghai Geology, 2003(3): 16-21.
- [12] 梅国雄,宰金珉,殷宗泽,等.沉降—时间曲线呈“S”型的证明及其应用—从土体本构关系[J].岩土力学,2005,26(增):21-24.
MEI Guoxiong, ZAI Jinmin, YIN Zongze, et al. Proof and application of settlement time curve as “S”: constitutive relation of soil [J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(S): 21-24.